

**Herleitung gewisser Klassen von autonomen
ganzrationalen Differentialgleichungen 1. Ordnung
mit konstanten Koeffizienten
im kritischen Fall rein imaginärer Eigenwerte,
für die die Nullösung stets stabil ist.**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

Vorgelegt von
Gero Schörnig
Neisse O/S

Frankfurt am Main ~~1963~~

1964

**Herleitung gewisser Klassen von autonomen
ganzrationalen Differentialgleichungen 1. Ordnung
mit konstanten Koeffizienten
im kritischen Fall rein imaginärer Eigenwerte,
für die die Nullösung stets stabil ist.**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

Vorgelegt von
Gero Schörnig
Neisse O/S

Frankfurt am Main 1963



Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. W. Franz

Referenten: Prof. Dr. R. Moufang
Prof. Dr. W. Franz

Mündliche Prüfung: 3./4. Februar 1964

Promotion: 24. Februar 1964

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
1. Die zweite Methode von Ljapunow.	5
2. Das zu untersuchende Differentialgleichungssystem und der Ansatz für die Ljapunow-Funktion.	7
3. Einführung einiger Matrizen.	8
4. Die Rekursionsformelkette.	10
5. Die Rechnung auf der elektronischen Rechenanlage.	20
6. Der Lückensatz.	21
7. Ableitung einiger Hilfssätze aus den Formeln der Rekursionsformelkette.	23
8. Beweis des Lückensatzes.	25
9. Eine Vermutung.	38
Anhang	39
Schlußwort	52
Literaturverzeichnis	52
Lebenslauf	53



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546413_0020

Einleitung

Bei einem System von zwei gewöhnlichen autonomen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y),\end{aligned}$$

deren rechte Seiten Polynome in x und y mit reellen konstanten Koeffizienten sind, im kritischen Fall rein imaginärer Eigenwerte, kann man mit Hilfe der zweiten Methode von Ljapunow Aussagen über das Stabilitätsverhalten der ungestörten Bewegung (Nulllösung) machen, ohne die Lösung des Differentialgleichungssystems zu kennen. Man kann allein aus den Koeffizienten der rechten Seiten der Differentialgleichungen das Stabilitätsverhalten der ungestörten Bewegung bestimmen.

Nach Ljapunow muß man eine definite Funktion $V(x,y)$ (Ljapunow-Funktion) finden, deren totale zeitliche, unter Berücksichtigung der gegebenen Differentialgleichungen gebildete Ableitung ebenfalls definit ist. Die so entstandene Funktion in x und y heißt im folgenden Ableitungsfunktion. Auf Grund des Vorzeichens dieser Ableitungsfunktion kann man Aussagen über das Stabilitätsverhalten der ungestörten Bewegung machen.

Es gelten folgende hinreichende Bedingungen bei einer positiv definiten Ljapunow-Funktion V , die aus Ljapunow'schen Sätzen folgen: ⁺⁾

1. Ist das Vorzeichen der Ableitungsfunktion negativ, so ist die ungestörte Bewegung asymptotisch stabil.
2. Ist das Vorzeichen der Ableitungsfunktion positiv, so ist die ungestörte Bewegung instabil.
3. Ist die Ableitungsfunktion identisch gleich Null, so ist die ungestörte Bewegung stabil.

⁺⁾ Lit. [1], § 9 Satz A, § 10 Satz B, § 13 Satz C

Die geometrische Bedeutung dieser Methode ist folgende: Man konstruiert mit Hilfe der Ljapunow-Funktion eine Schar von geschlossenen Kurven (Ljapunowkurven), die den Ursprung umgeben und die Eigenschaft haben, daß die Integralkurven jede Kurve nur in einer Richtung - entweder von außen nach innen oder von innen nach außen - durchstoßen. Die Richtung bestimmt jeweils das Vorzeichen der Ableitungsfunktion. Sobald man auf die Existenz einer solchen Kurvenschar schließen kann, kann man zugleich auf die Stabilität der ungestörten Bewegung schließen. Eine allgemeine Vorschrift, die in allen Fällen die Konstruktion einer Ljapunow-Funktion ermöglicht, existiert nicht. Gäbe es eine solche Vorschrift, wäre das Stabilitätsproblem vollständig gelöst. Ein Spezialfall ergibt sich, wenn die Ljapunowkurven von den Integralkurven nicht geschnitten, sondern tangiert werden. Die Ableitungsfunktion ist dann identisch gleich Null und die ungestörte Bewegung stabil. Die Ljapunowkurven sind dann in der Umgebung des Nullpunktes Lösungen des Differentialgleichungssystems.

Die Koeffizienten der Ljapunow-Funktion $V(x,y)$ werden so bestimmt, daß die Ableitungsfunktion die Form hat:

$$\dot{V} = V_x \dot{x} + V_y \dot{y} = V_x f + V_y g = \Phi(x,y) = G_n (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} + \Phi_{n+1}(x,y),$$

n gerade, $n \geq 4$, wobei Φ_{n+1} alle Glieder in x und y der Ordnung größer als n enthält. G_n ist ein Polynom in den Koeffizienten der Differentialgleichungen. Die Größe G_n ist die erste unter den Größen G_k ($k = 4, 6, 8, \dots$), die nicht identisch verschwindet. G_n ist die sogenannte Kriteriumsgröße für das Stabilitätsverhalten der ungestörten Bewegung, da das Vorzeichen der Ableitungsfunktion in der Umgebung des Nullpunktes von G_n bestimmt wird.

Zur Bestimmung des Stabilitätsverhaltens der ungestörten Bewegung geht man von gegebenen Differentialgleichungssystemen aus und hat für jeden speziellen Fall eine Kriteriumsgröße G_n auszurechnen.⁺⁾ Dabei versucht man zunächst mit der 3. Näherung in f und g auszukommen, das heißt, man vernachlässigt in den Differentialgleichungen alle Glieder mit der Ordnung größer als 3 in x und y . Man rechnet die Kriteriumsgröße G_4 der 3. Näherung aus. Ist G_4 von Null verschieden, so kann man auf Grund der oben genannten hinreichenden Bedingungen das Stabilitätsverhalten der Nulllösung entscheiden. Die Glieder in f und g der Ordnung größer

⁺⁾ Lit. [1] , S. 114 Beispiel

als 3 haben dann keinen Einfluß auf das Stabilitätsverhalten, weil diese Glieder keinen Einfluß auf G_4 haben. Verschwindet G_4 identisch in den Koeffizienten von f und g , die G_4 bestimmen, dann haben die höheren Glieder einen Einfluß auf das Stabilitätsverhalten. Man muß also zur Bestimmung der Kriteriumsgröße alle Glieder von f und g bis zur 5. Ordnung in x und y berücksichtigen. Man erhält so eine Kriteriumsgröße der 5. Näherung. Ist auch sie identisch gleich Null, muß man zur nächst höheren Näherung übergehen. In Absatz 4 wird deutlich, weshalb hier nur die Näherungen ungerader Ordnung in f und g zu berücksichtigen sind.

Die Rechnung kann sehr langwierig sein, wenn das Stabilitätsproblem erst durch Glieder hoher Ordnung entschieden wird.⁺⁾ Um die Kriteriumsgrößen der einzelnen Näherungen anzugeben, muß man komplizierte lineare Gleichungssysteme auflösen.⁺⁺⁾

Für die Lösung des Problems wurde in dieser Arbeit eine Rekursionsformelkette aufgestellt, mit Hilfe deren man rekursiv die Kriteriumsgrößen der einzelnen Näherungen berechnen kann. Diese Formeln wurden für eine elektronische Rechenanlage IBM 650 mit 4000 Kernspeicherplätzen programmiert. Auf diese Weise kann man die Kriteriumsgrößen von der 3. bis im Bedarfsfall zur 11. Näherung bestimmen, bei größeren Rechenanlagen noch weiter. Man braucht der Rechenanlage nur die Koeffizienten der gegebenen Differentialgleichungen einzugeben. Die Rechenzeit erfordert bei dieser Maschine, wenn man bis zur 11. Näherung rechnen muß, ungefähr 25 Minuten. Bis zur 7. Näherung dauert die Rechnung ca. 6-7 Minuten.

Um den Einfluß der einzelnen Koeffizienten des Differentialgleichungssystems auf das Stabilitätsverhalten der Nulllösung studieren zu können, muß man die Kriteriumsgrößen G_n als Polynome der Koeffizienten in f und g , soweit man sie bei den einzelnen Näherungen berücksichtigt, angeben. Die Aufgabe besteht dann darin, Aussagen über das Vorzeichen bzw. das identische Verschwinden von G_n zurückzuführen auf Aussagen über die Koeffizienten in f und g .

Die Berechnung dieser Polynome ist mit umfangreicher Rechnung verbunden, die bei der 3. Näherung gerade noch ausführbar ist. Erst durch

^{+) Lit. [1] , S. 145, Absatz 3}

^{++) Lit. [1] , Methode in § 37}

die Verwendung einer elektronischen Rechenanlage (IBM 704) war es möglich, weitere Rechnungen auszuführen. Dabei wurde ein von dem Verfasser geschriebenes Programm angewandt, mit Hilfe dessen man auf einer elektronischen Rechenanlage nicht nur numerisch sondern auch algebraisch rechnen kann.⁺⁾ Man hat die Möglichkeit, ganzrationale Rechenoperationen an Polynomen in beliebig vielen Unbestimmten und rationalen Zahlenkoeffizienten auszuführen.

Dadurch war es möglich, auf Grund der Rekursionsformelkette das Kriteriumspolynom der 5. Näherung allgemein auszurechnen. Es ergab einen Ausdruck von 184 Gliedern gegenüber 10 Gliedern bei dem Polynom nach der 3. Näherung. Das Polynom der 7. Näherung konnte nicht mehr von der Maschine ausgerechnet werden, da sogar die Kapazität der elektronischen Rechenanlage IBM 704 zu klein war. Bei dem Übergang von der 3. zur 5. Näherung gibt es eine Steigerung der Gliedzahl um das rund 18-fache. Nimmt man diese Steigerung auch für die höheren Näherungen an, so kommt man bei linearer Extrapolation in der Schätzung für das Kriteriumspolynom der 7. Näherung auf ca. 3300 und der 9. Näherung auf ca. 64 000 Glieder.

Um dennoch den Einfluß der Koeffizienten des Differentialgleichungssystems auf das Stabilitätsverhalten der Nulllösung studieren zu können, wurden die Kriteriumspolynome nicht nur aus den Koeffizienten der Differentialgleichungen, sondern auch aus den bereits aus niedrigeren Näherungen bekannten Koeffizienten der Ljapunow-Funktion gebildet. Bei jeder Näherung werden neben den G_n ebenfalls sogleich die Koeffizienten der Ljapunow-Funktion schrittweise als Polynome der Koeffizienten in f und g berechnet und bei jeder weiteren Näherung wird die Ljapunow-Funktion um die entsprechenden höheren Glieder erweitert. Die Gliedzahl der G_n ließ sich so in erträglichen Grenzen halten. Von der elektronischen Rechenanlage IBM 704 wurden die Polynome bis zur 11. Näherung ausgerechnet. Auf diese Weise konnte man sukzessiv den Einfluß der Koeffizienten der Differentialgleichungen auf das Stabilitätsverhalten der Nulllösung verfolgen.

Insbesondere werden hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten der Differentialgleichungen angegeben, damit alle G_n identisch verschwinden, die Nulllösung also immer stabil ist. Diese Bedingungen wurden zunächst

^{+) Veröffentlicht in der Zeitschrift "elektronische datenverarbeitung", Heft 3, Juni 1963. Lit. [5].}

heuristisch mit Hilfe der elektronischen Rechenanlage gefunden. Sie besagen, daß in den Koeffizienten von f und g gewisse Lücken auftreten; die restlichen Koeffizienten hingegen beliebig gewählt werden können.

So war es möglich, 4 Differentialgleichungssysteme zu finden, deren Nullösung stets stabil ist. Der Beweis des gefundenen Ergebnisses erfolgte mit Hilfe der Rekursionsformelkette. Die Ergebnisse wurden als " Lückensatz " formuliert.

Ein 5. Differentialgleichungssystem, in dem gewisse Symmetrien der Koeffizienten in f und g verlangt werden, ist vermutlich ebenfalls ein solches, in dem alle G_n identisch verschwinden; bis G_{12} bestätigte dies die Maschine, der allgemeine Beweis ist noch nicht gelungen.

Im Anhang zu dieser Arbeit sind Originalausgaben der elektronischen Rechenanlage angefügt. In ihnen sind die Koeffizienten der Glieder der allgemeinen Ljapunow-Funktion bis zur 4. Dimension in x und y und die Kriteriumsgrößen der 3. und 5. Näherung angegeben.

1. Die zweite Methode von Ljapunow

Bei der zweiten Methode von Ljapunow kommt es darauf an, zu einem gegebenen Differentialgleichungssystem eine definite Funktion $V(x,y)$ (Ljapunow-Funktion) zu finden, deren totale zeitliche unter Berücksichtigung der Gleichungen des Systems gebildeten Ableitung definit ist. Aussagen über die Stabilität oder Instabilität der ungestörten Bewegung kann man dann mit Hilfe der Sätze von Ljapunow ⁺⁾ auf Grund des Vorzeichens der totalen zeitlichen Ableitung machen.

Um für ein gegebenes Differentialgleichungssystem eine definite Funktion V zu finden, setzt man die Ljapunow-Funktion V als definite Funktion mit unbestimmten Koeffizienten an.

$$V(x,y) = x^2 + y^2 + v_3(x,y) + v_4(x,y) + \dots, \quad (1.1)$$

wobei die $v_i(x,y)$ nur Glieder von i -ter Dimension in x und y enthalten und die Koeffizienten dieser Glieder noch zu bestimmen sind.

⁺⁾ Lit. [1], § 9 Satz A, § 10 Satz B, § 13 Satz C

$V(x,y)$ ist in der Umgebung des Nullpunktes eine positive definite Funktion, da schon $V = x^2 + y^2$ eine positiv definite Form ist und nach einem Satz ^{+) über definite Formen die Definitheit für kleine Werte von x und y nicht durch Hinzufügen von Gliedern höherer Ordnung verletzt wird.}

Die unbekannten Koeffizienten der Ljapunow-Funktion werden auf Grund der Bedingung für die totale zeitliche Ableitung $\dot{\Phi}$ der Ljapunow-Funktion bestimmt. Diese Ableitung ist in der Form

$$\dot{\Phi}(x,y) = G_n(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} + \Phi_{n+1}(x,y), \quad n \text{ gerade}, n \geq 4 \quad (1.2)$$

eine definite Funktion für kleine x und y ^{+) wenn Φ_{n+1} nur Glieder der Dimension größer als n in x und y enthält. n ist die kleinste gerade Zahl, für die $G_n \neq 0$ ist. Das Vorzeichen von G_n bestimmt dann das Vorzeichen von $\dot{\Phi}$.}

Ist $G_n < 0$, so ist die Nulllösung des gegebenen Differentialgleichungssystems asymptotisch stabil; ist $G_n > 0$, so ist die Nulllösung instabil. Es kann auch vorkommen, daß alle $G_n \equiv 0$ sind. Dann ist die Nulllösung des gegebenen Differentialgleichungssystems stabil. Wann dieser Fall eintreten kann, wird in der vorliegenden Arbeit untersucht.

Die Koeffizienten der Ljapunow-Funktion müssen so bestimmt werden, daß in $\dot{\Phi}(x,y)$ die Glieder ungerader Dimension in x und y bis zur Dimension $(n-1)$ verschwinden und die Summe der Glieder gerader Dimension bis zur Dimension n gleich

$$G_n (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \quad \text{ist.}$$

Durch diese Forderung erhält man Gleichungssysteme für die Koeffizienten in V ; dabei bestimmen die Glieder $(n-1)$ -ter Dimension in $\dot{\Phi}$ die Koeffizienten der Glieder n -ter Dimension in V .

^{+) Lit. [1], § 8 Lemma 4}

2. Das zu untersuchende Differentialgleichungssystem und der Ansatz für die Ljapunow-Funktion

Das zu untersuchende System hat folgende allgemeine Form:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\lambda \cdot y + \sum_{i=2}^1 \sum_{j=1}^{i+1} A_{ij} y^{i-j+1} x^{j-1} = f(x, y) \\ \dot{y} &= \lambda \cdot x + \sum_{i=2}^1 \sum_{j=1}^{i+1} B_{ij} x^{i-j+1} y^{j-1} = g(x, y),\end{aligned}\tag{2.1}$$

wobei A_{ij} , B_{ij} und λ reelle Konstanten sind, und $\lambda \neq 0$ vorausgesetzt ist.

Werden in den Polynomen für f und g nur die Glieder bis zur Dimension $n \leq 1$ betrachtet, so nennen wir dies die n -te Näherung des Differentialgleichungssystems.

l kann beliebig groß sein. Der erste Index i der Koeffizienten A_{ij} oder B_{ij} gibt die Dimension des zugehörigen Gliedes in Bezug auf x und y an. Der zweite Index j der Koeffizienten bestimmt den Grad von x und damit den Grad von y des Gliedes.

Der allgemeine Ansatz für die Ljapunow-Funktion lautet:

$$V = x^2 + y^2 + \sum_{i=3}^{l+1} \sum_{j=1}^{i+1} C_{ij} x^{i-j+1} y^{j-1} .\tag{2.2}$$

Wir setzen hier und im folgenden

$$C_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad j = 0 \text{ und } j > l + 1 .\tag{2.3}$$

Zur Bestimmung von G_n werden alle Glieder des Differentialgleichungssystems und der Ljapunow-Funktion bis $l = n-1$ gebraucht.

3. Einführung einiger Matrizen

Für die Ableitung der Formeln der Rekursionsformelkette werden einige Matrizen gebraucht, die aus den Koeffizienten der Differentialgleichungen und den Koeffizienten der Ljapunow-Funktion gebildet werden.

a) Matrizen $\mathcal{A}_n$ und $\mathcal{L}_n$

Auf Grund der Koeffizienten des Differentialgleichungssystems (2.1) werden die Matrizen $\mathcal{A}_n$ und $\mathcal{L}_n$ wie folgt gebildet:

Matrix $\mathcal{A}_n$: für $n = 2, 3, 4 \dots$

$$\mathcal{A}_n = (a_{rs}^{(n)}) \text{ mit } r \leq n+1 \text{ und } s \leq n-1$$

$$\text{wobei } a_{rs}^{(n)} = \begin{cases} A_{n-s+1, n-r-s+3} & \text{für } r+s \leq n+2 \\ 0 & \text{für } r+s > n+2 \end{cases}$$

(3.1)

Matrix $\mathcal{L}_n$: für $n = 2, 3, 4 \dots$

$$\mathcal{L}_n = (b_{rs}^{(n)}) \text{ mit } r \leq n+1 \text{ und } s \leq n-1$$

$$\text{wobei } b_{rs}^{(n)} = \begin{cases} B_{n-s+1, r} & \text{für } r+s \leq n+2 \\ 0 & \text{für } r+s > n+2 \end{cases}$$

(3.2)

Dabei stehen in $\mathcal{A}_n$ respektive $\mathcal{L}_n$ in der r -ten Zeile die Koeffizienten der Potenzprodukte in f respektive g , die vom $(r-1)$ -ten Grade in y sind. In der s -ten Spalte stehen die Koeffizienten der Glieder der Dimension $(n+1-s)$ in x und y .

b) Matrizen $\mathcal{L}_n^{(1)}$ und $\mathcal{L}_n^{(2)}$

Von der Ljapunow-Funktion (2.2) werden die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ gebildet. Die Koeffizienten der Potenzprodukte von $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ geben Anlaß zu Matrizen $\mathcal{L}_n^{(1)}$ und $\mathcal{L}_n^{(2)}$:

Matrix $\mathcal{L}_n^{(1)}$: für $n = 2, 3, 4 \dots$

$\mathcal{L}_n^{(1)} = (c_{rs}^{(1)})$ mit $r \leq n-1$ und $s \leq n+1$

$$\text{wobei } c_{rs}^{(1)} = \begin{cases} (r-s+2) c_{r+1,s} & \text{für } s \leq r+1 ; r > 1 \\ 0 & \text{für } s > r+1 \\ 2 & \text{für } r = 1 ; s = 1 \\ 0 & \text{für } r = 1 ; s = 2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Matrix $\mathcal{L}_n^{(2)}$: für $n = 2, 3, 4 \dots$

$\mathcal{L}_n^{(2)} = (c_{rs}^{(2)})$ mit $r \leq n-1$ und $s \leq n+1$

$$\text{wobei } c_{rs}^{(2)} = \begin{cases} s c_{r+1,s+1} & \text{für } s \leq r+1 ; r > 1 \\ 0 & \text{für } s > r+1 \\ 0 & \text{für } r = 1 ; s = 1 \\ 2 & \text{für } r = 1 ; s = 2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Dabei stehen in $\mathcal{L}_n^{(1)}$ respektive $\mathcal{L}_n^{(2)}$ in der r -ten Zeile die Koeffizienten der Glieder aus $\frac{\partial V}{\partial x}$ respektive $\frac{\partial V}{\partial y}$ der Dimension r in x und y . In der s -ten Spalte stehen die Koeffizienten der Potenzprodukte, die vom Grade $(s-1)$ in y sind.

c) Produktmatrizen $\mathcal{O}_n \mathcal{L}_n^{(1)}$ und $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_n^{(2)}$

Durch Multiplikation von $\mathcal{O}_n$ und $\mathcal{L}_n^{(1)}$ bzw. $\mathcal{L}_n$ und $\mathcal{L}_n^{(2)}$ entstehen in der Produktmatrix als Elemente alle Koeffizienten aus $\frac{dx}{dt} \frac{\partial V}{\partial x}$ bzw. $\frac{dy}{dt} \frac{\partial V}{\partial y}$ von der Dimension $(n+1)$ in x und y , da die Elemente der k -ten Spalte von $\mathcal{O}_n$ bzw. $\mathcal{L}_n$ Koeffizienten der Glieder aus f bzw. g der Dimension $(n+1-k)$ in x und y und die Elemente der k -ten Zeile von $\mathcal{L}_n^{(1)}$ bzw. $\mathcal{L}_n^{(2)}$ Koeffizienten der Glieder aus $\frac{\partial V}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial V}{\partial y}$ der Dimension k in x und y sind. In der k -ten Zeile und l -ten Spalte der Produktmatrix stehen Koeffizienten der Potenzprodukte aus $\frac{dx}{dt} \frac{\partial V}{\partial x}$ bzw. $\frac{dy}{dt} \frac{\partial V}{\partial y}$ vom Grade $(k+l-2)$ in y , da die Elemente der k -ten Zeile von $\mathcal{O}_n$ bzw. $\mathcal{L}_n$ Koeffizienten der Potenzprodukte aus f bzw. g vom $(k-1)$ -ten Grade in y und die Elemente der l -ten Spalte von $\mathcal{L}_n^{(1)}$ bzw. $\mathcal{L}_n^{(2)}$ Koeffizienten der Potenzprodukte aus $\frac{\partial V}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial V}{\partial y}$ vom Grade $(l-1)$ in y sind. Die Elemente der Produktmatrix mit konstanter Indexsumme $(k+l)$ sind daher Koeffizienten der Potenzprodukte aus $\frac{dx}{dt} \frac{\partial V}{\partial x}$ bzw. $\frac{dy}{dt} \frac{\partial V}{\partial y}$, die vom gleichen Grade in y und somit auch vom gleichen Grade in x sind.

4. Die Rekursionsformelkette

Die Koeffizienten der Glieder der Ljapunow-Funktion werden schrittweise berechnet. Dazu wird eine Rekursionsformelkette entwickelt. Sind die Koeffizienten der Glieder der Ljapunow-Funktion bis zur $(n-1)$ -ten Dimension bekannt, so kann man aus ihnen und den Koeffizienten der Differentialgleichungen bis zur $(n-1)$ -ten Dimension, d.h. allen Koeffizienten der $(n-1)$ -ten Näherung, die Koeffizienten der Glieder bis zur n -ten Dimension in V berechnen. Außerdem erhält man bei jedem geraden n die entsprechende Kriteriumsgröße G_n .

Bei jeder Anwendung der Rekursionsformelkette muß der Grad der Näherung um 1 erhöht werden. Da man nur bei jeder zweiten Anwendung der Rekursionsformelkette zu einer Kriteriumsgröße G_n gelangt, also durch die $(n-1)$ -te Näherung, hat es keinen Sinn, die $(n-2)$ -te Näherung zu betrachten, da sie keine Kriteriumsgröße liefert.

Für das Stabilitätsproblem sind also nur die Näherungen ungerader Ordnung wichtig.

Die totale zeitliche Ableitung der Ljapunow-Funktion ist

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} . \quad (4.1)$$

Setzt man darin für V den Ansatz (2.2) und für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die Werte aus (2.1) ein, so erhält man

$$S_n = \lambda x \frac{\partial V}{\partial y} - \lambda y \frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{m=1}^{n+1} D_{nm} x^{n-m+1} y^{m-1} \quad (4.2)$$

als Summe der Glieder n -ter Dimension in ϕ mit

$$v_n = \sum_{j=0}^n C_{n,j+1} x^{n-j} y^j \quad n \geq 3 . \quad (4.3)$$

Sind die Koeffizienten der Ljapunow-Funktion bis zur $(n-1)$ -ten Dimension bekannt, so sind die D_{nm} als Polynome in den Koeffizienten der $(n-1)$ -ten Näherung in f und g gegeben. Mit Hilfe der in Abschnitt 3 eingeführten Matrizen definieren wir die Matrix $\mathcal{J}_n$:

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{A}_{n-1} \mathcal{L}_{n-1}^{(1)} + \mathcal{L}_{n-1} \mathcal{L}_{n-1}^{(2)} = (d_{ij}^{(n)}) . \quad (4.4)$$

$\mathcal{J}_n$ ist eine n -reihige quadratische Matrix. Ihre Elemente sind nach Abschnitt 3c Koeffizienten der Glieder aus $\frac{dx}{dt} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial V}{\partial y}$ von der Dimension n in x und y , und zwar sind die Elemente mit konstanter Indexsumme $(i+j)$ Koeffizienten der Potenzprodukte vom Grade $(i+j-2)$ in y und $(n-i-j+2)$ in x . Die D_{nm} erhält man daher aus den Elementen von $\mathcal{J}_n$ gemäß

$$D_{nm} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=m+1}}^n d_{ij}^{(n)} \quad \text{mit } m = 1, 2, \dots, n+1 . \quad n \geq 3 \quad (4.5)$$

Für S_n aus (4.2) gilt nach Abschnitt 1 (Seite 6):

$$S_n = 0 \quad \text{für } n \text{ ungerade} \quad (4.6)$$

$$S_n = G_n (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \quad \text{für } n \text{ gerade} . \quad (4.7)$$

Setzt man diese Werte für S_n in (4.2) ein, so erhält man für jedes n durch Koeffizientenvergleichung $(n+1)$ Gleichungen:

$$D_{nm} + (m C_{n,m+1} - (n-m+2) C_{n,m-1}) \lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n, m \text{ gerade} \\ \left(\begin{matrix} \frac{n}{2} \\ \frac{m-1}{2} \end{matrix} \right) G_n & \text{für } n \text{ gerade, } m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.8)$$

$m=1, \dots, n+1; n \geq 3$
wobei nach (2.3) $C_{ij} = 0$ für $j = 0$ und $j > n+1$

Dies ist ein inhomogenes Gleichungssystem.

Bei ungeradem n sind dies $(n+1)$ Gleichungen für die $(n+1)$ Unbekannten C_{nj} ($j=1, 2, \dots, n+1$). Da in den Gleichungen mit ungeradem m nur C_{nj} mit geradem j und in den Gleichungen mit geradem m nur C_{nj} mit ungeradem j vorkommen, hat man zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme mit je $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen zur Bestimmung der $(n+1)$ Unbekannten.

Die Matrizen aus den Koeffizienten der C_{ij} bestehen aus von Null verschiedenen Elementen in der Hauptdiagonale und verschwindenden Elementen oberhalb respektive unterhalb der Hauptdiagonalen. Der Rang jeder dieser Matrizen ist $\frac{n+1}{2}$. Er ist gleich der Anzahl der Gleichungen jedes Systems. Die C_{nj} ($j=1, 2, \dots, n+1$) lassen sich also für ungerades n eindeutig bestimmen.

Für gerades n und gerades m hat man $\frac{n}{2}$ Gleichungen für die $(\frac{n}{2} + 1)$ Unbekannten C_{nj} ($j=1, 3, \dots, n+1$). Die Koeffizientenmatrix hat den Rang $\frac{n}{2}$. Alle Determinanten vom Grade $\frac{n}{2}$ sind ungleich Null. Man kann also eine der $(\frac{n}{2} + 1)$ Unbekannten herausgreifen und die anderen als lineare Funktionen dieser Unbekannten darstellen, der man einen beliebigen Wert erteilen kann. Wir wählen im folgenden

$$C_{n3} = 0 \quad \text{für gerades } n. \quad (4.9)$$

Bei geradem n und ungeradem m hat man $(\frac{n}{2} + 1)$ Gleichungen für die $(\frac{n}{2} + 1)$ Unbekannten C_{nj} ($j = 2, 4, \dots, n$) und G_n . Die Matrix aus den Koeffizienten der C_{ij} und G_n ist

$$(h_{ij}^{(n)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q_1 \\ 1-n & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 3-n & 5 & \dots & 0 & 0 & q_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1-n & q_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & q_m \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} i, j \leq \frac{n}{2} + 1 \\ q_1 = \left(\frac{\frac{n}{2}}{1-1} \right) \\ 1 \text{ ungerade, } 1 \leq m. \end{array}$$

Man sieht leicht, daß der Rang dieser Matrix $(\frac{n}{2} + 1)$ ist. Er ist gleich der Anzahl der Gleichungen des Systems. Die Unbekannten C_{ij} ($j = 2, 4, \dots, n$) und G_n lassen sich eindeutig bestimmen. Das Gleichungssystem (4.8) ist also auch für gerades n unter Berücksichtigung von (4.9) eindeutig lösbar.

Um aus den Gleichungen (4.8) die Unbekannten zu berechnen, multipliziert man jede Gleichung mit dem Faktor

$$F = (n - m)!!(m - 2)!! \quad (4.91)$$

Dabei ist definiert ^{*)}:

$$\begin{array}{ll} k!! = k \cdot (k-2) \cdot (k-4) \dots 4 \cdot 2 & \text{für } k \text{ gerade, } k > 0 \\ k!! = k \cdot (k-2) \cdot (k-4) \dots 3 \cdot 1 & \text{für } k \text{ ungerade, } k > 0 \\ k!! = 1 & \text{für } k = 0 \text{ und } k = -1 \end{array}$$

Die Summation der linken bzw. rechten Seiten aller mit dem Faktor F (4.91) multiplizierten Gleichungen (4.8) mit $m = m_1 + 2(r-1)$ für $r = w_1, w_1+1, \dots, w_2-1, w_2$ bei $w_1 \leq w_2$ ergibt, wobei $0 < m_1 < 3$ ist:

a) Für ungerade n eine Beziehung zwischen

$$C_{n, m_1+2w_1-3} \text{ und } C_{n, m_1+2w_2-1}, \text{ wobei } 1 \leq w_1 \leq w_2 \leq \frac{n+1}{2} \text{ ist.}$$

b) Für gerade n und gerade m_1 eine Beziehung zwischen

$$C_{n, m_1+2w_1-3} \text{ und } C_{n, m_1+2w_2-1}, \text{ wobei } 1 \leq w_1 \leq w_2 \leq \frac{n}{2} \text{ ist.}$$

^{*)} Lit. [3], S. 425 und 426

c) Für gerade n und ungerade m_1 eine Beziehung zwischen

$$C_{n, m_1+2w_1-3}, C_{n, m_1+2w_2-1} \text{ und } G_n, \text{ wobei } 1 \leq w_1 \leq w_2 \leq \frac{n+2}{2} \text{ ist.}$$

Alle anderen Unbekannten fallen bei der Summation heraus, weil der Faktor F (4.91) so gewählt wurde.

Man erhält mit $0 < m_1 < 3$:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=w_1}^{r=w_2} (n - m_1 - 2(r-1))!! (m_1 + 2r - 4)!! D_{n, m_1+2(r-1)} \\ & + \lambda \left[(m_1 + 2(w_2-1))!! (n - m_1 - 2(w_2-1))!! C_{n, m_1+2w_2-1} \right. \\ & \left. - (n - m_1 - 2w_1 + 4)!! (m_1 + 2w_1 - 4)!! C_{n, m_1+2w_1-3} \right] \\ & = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade, } 1 \leq w_1 \leq w_2 \leq \frac{n+1}{2} \\ 0 & \text{für } n, m_1 \text{ gerade, } 1 \leq w_1 \leq w_2 \leq \frac{n}{2} \\ \sum_{r=w_1}^{r=w_2} \left(\frac{\frac{n}{2}}{m_1+2r-3} \right) (n-m_1-2(r-1))!! (m_1+2r-4)!! G_n & \text{für } n \text{ gerade, } m_1 \text{ ungerade, } 1 \leq w_1 \leq w_2 \leq \frac{n+2}{2} \end{cases} \quad (4.10) \end{aligned}$$

Durch die Wahl von m_1, w_1 und w_2 kann man darüber verfügen, welche und wieviele Gleichungen von (4.8) addiert werden, d.h. welche Beziehung zwischen den C_{nj} ($j = 1, 2, \dots, n+1$) und G_n man erhält. Insbesondere sind die Beziehungen wichtig, bei denen in (4.10) durch geeignete Wahl von m_1, w_1 und w_2 die dort auftretenden Unbekannten C_{nj} von vornherein gemäß (2.3) gleich Null sind. Man erhält dann eine Formel zur Berechnung der verbleibenden Unbekannten.

Bei ungeradem n setzt man $m_1=1, w_1=1$ und $w_2=w$. Dadurch erhält in (4.10) die eine Unbekannte C_{nj} den zweiten Index $j=0$; verschwindet also.

Es ergibt sich eine Formel zur Berechnung von $C_{n,2w}$; man kann also alle C_{nm} mit ungeradem n und geradem m berechnen.

Formel für C_{nm} mit n ungerade und m gerade

$$C_{n,2w} = - \frac{\sum_{r=1}^{r=w} (n-2r+1)!! (2r-3)!! D_{n,2r-1}}{(2w-1)!! (n-2w+1)!! \lambda} \quad (4.11)$$

mit $w = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ und n ungerade; $n > 1$

Bei ungeradem n setzt man weiter $m_1=2$, $w_1=w$ und $w_2=\frac{n+1}{2}$, da $C_{n,n+2}$ wegen (2.3) gleich Null ist, erhält man eine Formel zur Berechnung von $C_{n,2w-1}$. Man kann also auch alle C_{nm} mit ungeradem n und ungeradem m berechnen.

Formel für C_{nm} mit n ungerade und m ungerade

$$C_{n,2w-1} = \frac{\sum_{r=w}^{r=\frac{n+1}{2}} (n-2r)!! (2r-2)!! D_{n,2r}}{(n-2w+2)!! (2w-2)!! \lambda} \quad (4.12)$$

mit $w = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ n ungerade, $n > 1$

Setzt man in (4.12)

$$w = \frac{n-2\bar{w}+3}{2} \quad \text{und} \quad r = \frac{n-2\bar{r}+3}{2}$$

und vertauscht die Grenzen der Summe im Zähler, so erhält man Formel (4.12) in anderer Form:

$$C_{n,n+2-2\bar{w}} = \frac{\sum_{\bar{r}=1}^{\bar{r}=\bar{w}} (2\bar{r}-3)!! (n-2\bar{r}+1)!! D_{n,n+2-(2\bar{r}-1)}}{(2\bar{w}-1)!! (n-2\bar{w}+1)!! \lambda} \quad (4.12a)$$

mit $\bar{w} = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ n ungerade, $n > 1$

In (4.11) und (4.12a) treten rechts Linearkombinationen gewisser D_{nm} auf; die Glieder D_{nm} mit respektiven gleichen Koeffizienten in beiden Gleichungen haben solche zweiten Indizes, deren Summe gleich $n+2$ ist. Die Summe der zweiten Indizes der linken Seiten ist ebenfalls $n+2$. Beide Formeln zusammen bestimmen alle C_{nm} für ungerades n und beliebiges m . Durch Einsetzen verifiziert man leicht, daß die aus (4.11) und (4.12a) bestimmten Größen C_{nm} in der Tat die Gleichungen (4.8) erfüllen.

Setzt man in Formel (4.10) bei geradem n und ungeradem m_1 ein $m_1=1$, $w_1=1$ und $w_2=\frac{n+2}{2}$, so erhält man, da C_{n0} und $C_{n,n+2}$ wegen (2.3) gleich Null sind, eine Formel zur Berechnung von G_n :

Formel für G_n mit n gerade, $n \geq 4$

$$G_n = \frac{\sum_{r=1}^{r=\frac{n+2}{2}} (2r-3)!! (n-2r+1)!! D_{n,2r-1}}{\sum_{r=1}^{r=\frac{n+2}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{r-1} (2r-3)!! (n-2r+1)!!} \quad (4.13)$$

Der Nenner in (4.13) läßt sich vereinfachen. Es gilt nämlich ^{*)}:

$$\int_0^{\pi} dx = \frac{\pi}{\frac{n}{2}} \sum_{r=0}^{r=\frac{n}{2}} \frac{(n-2r-1)!! (2r-1)!!}{(\frac{n}{2} - r)! r!} \quad (4.14)$$

^{*)} Die Formel ist ein Spezialfall, der bei Gradstein Lit. [3], Seite 158, angegebenen Formel 3.425 für $q=0$, $p=1$, $a=\frac{n}{2}$ und $k=r$. Zum Beweis der Formel verweist Gradstein auf Lindman Lit. [4]. Lindman gibt dort in Tab. 64, Formel 14, S. 39 einen Weg zur Ableitung der Formel an, der nachgeprüft wurde.

Aus dieser Formel erhält man für gerades n wegen

$$\frac{1}{(\frac{n}{2} - r)! r!} = \binom{\frac{n}{2}}{r} \frac{1}{(\frac{n}{2})!} \quad \text{und} \quad \overline{n} = \int_0^{\overline{n}} dx \quad (4.15)$$

die Beziehung

$$n!! = \sum_{r=1}^{r=\frac{n+2}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{r-1} (n-2r+1)!! (2r-3)!! \quad (4.16)$$

Die Formel (4.13) lautet dann unter Berücksichtigung von (4.16)

$$G_n = \frac{\sum_{r=1}^{r=\frac{n+2}{2}} (2r-3)!! (n-2r+1)!! D_{n,2r-1}}{n!!} \quad (4.17)$$

für n gerade, $n \geq 4$

Setzt man in (4.10) bei geradem n und ungeradem m_1 ein $m_1=1$, $w_1=1$ und $w_2=w$, so erhält man, da C_{n0} gleich Null ist und G_n nach Formel (4.17) bekannt ist, eine Formel zur Berechnung von $C_{n,2w}$, d.h. man kann alle C_{nm} mit geradem n und geradem m berechnen.

Formel für C_{nm} mit n gerade und m gerade

$$C_{n,2w} = \frac{\sum_{r=1}^{r=w} (2r-3)!! (n-2r+1)!! \left[\binom{\frac{n}{2}}{r-1} G_n - D_{n,2r-1} \right]}{(2w-1)!! (n-2w+1)!! \lambda} \quad (4.18)$$

für $w = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ n gerade, $n > 2$

Für gerades n und gerades m_1 erhält man aus (4.10), da nach (4.9) $C_{n,3}$ gleich Null ist, für $m_1=2$, $w_1=1$ und $w_2=1$

$$C_{n1} = \frac{D_{n2}}{n\lambda} \quad n \text{ gerade, } n > 2 \quad (4.19)$$

und für $m_1=2$, $w_1=2$ und $w_2=w$ eine Formel zur Berechnung von $C_{n,2w+1}$ ($w=2,3,\dots,\frac{n}{2}$). Man kann alle C_{nm} mit geradem n und ungeradem m berechnen.

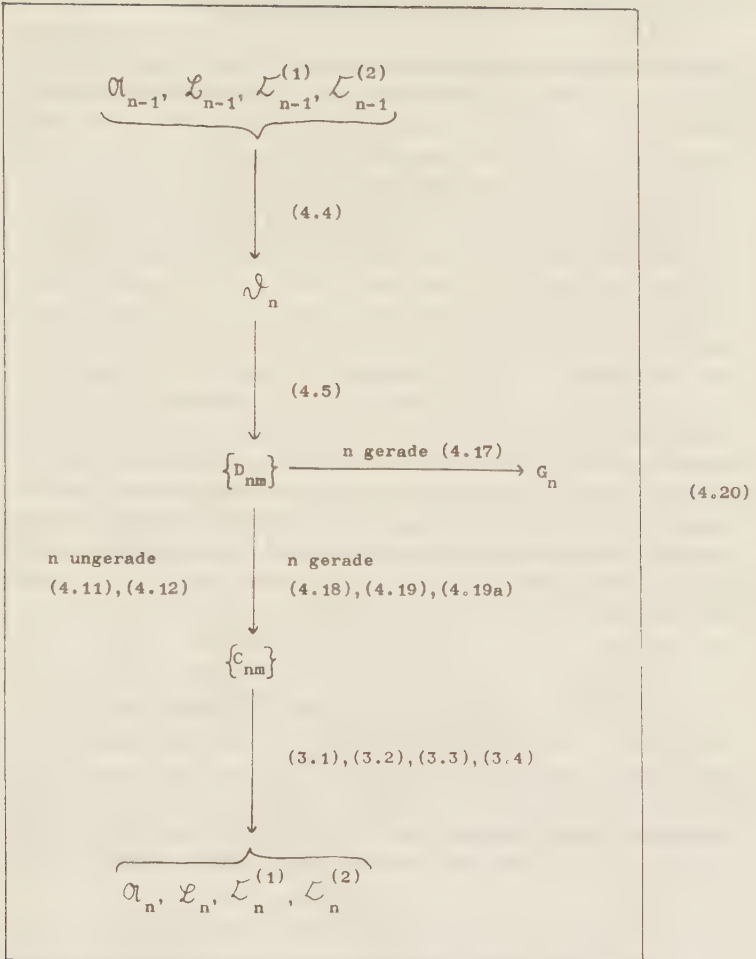
Formel für C_{nm} mit n gerade und m ungerade, $m \geq 5$

$$C_{n,2w+1} = - \frac{\sum_{r=2}^{r=w} (n-2r)!!(2r-2)!! D_{n,2r}}{(2w)!!(n-2w)!! \lambda} \quad (4.19a)$$

für $w = 2,3,\dots,\frac{n}{2} \quad n \text{ gerade, } n > 2$

Aus den Formeln (4.11), (4.12), (4.17), (4.18), (4.19) und (4.19a) lassen sich alle C_{nm} und G_n berechnen. Diese genügen den Gleichungen (4.8).

Man kann aus diesen Formeln eine Rekursionsformelkette aufstellen (4.20). Die Zahlen in Klammern geben die Formeln an, nach welchen die einzelnen Größen berechnet werden. Die Formeln sollen im weiteren Verlauf der Arbeit kurz **Formeln der Rekursionsformelkette** (4.20) genannt werden.



5. Die Rechnung auf der elektronischen Rechenanlage

Auf Grund der Rekursionsformelkette (4.20) wurden G_4 und G_6 von der elektronischen Rechenanlage IBM 704 allgemein berechnet unter Benutzung des vom Verfasser geschriebenen Programms über algebraische Rechnungen auf einer elektronischen Rechenanlage. ⁺⁾ Im Anhang sind einige Ergebnisse der Originalmaschinenausgabe beigelegt.

In der Ausgabe bedeutet jede Zeile ein Glied des Ergebnispolynomes, d.h. die einzelnen Summanden auf der rechten Seite einer Ergebnisgleichung sind hier nicht- wie sonst üblich - nebeneinander, sondern untereinander aufgeführt, wobei jeder Faktor für sich geschrieben ist. Der erste Faktor eines Gliedes ist jeweils der numerische Koeffizient des Gliedes. Er ist der Einfachheit halber von der Maschine als Dezimalzahl berechnet worden. Dabei tauchen Abrundungsfehler auf. Da man weiß, durch welche Zahlen während der Rechnung dividiert wurde, kann man sehr leicht den exakten Bruch rekonstruieren. Bei der Kriteriumsgröße G_6 der 5. Näherung wurde dies durchgeführt und der exakte Faktor in einer besonderen Spalte neben dem Ergebnis angefügt. Bei einer geplanten Erweiterung des Programms kann man diese Arbeit auch der Maschine überlassen. Der erste Summand von G_6 (siehe Anhang; Seite 46) würde z.B. zu lesen sein als

$$- \frac{5}{48} \cdot A_{21}^3 \cdot A_{22}$$

Dabei ist bei G_6 die Rechnung aus Speicherraumgründen für $\lambda = 1$ durchgeführt. Für den allgemeinen Fall $\lambda \neq 1$ muß in G_6 jeder Summand, der aus n Faktoren besteht, mit $1/\lambda^{(n-1)}$ multipliziert werden. Bei G_4 ist dieser Faktor unter der Bezeichnung $\$1/LA$ in die Rechnung aufgenommen worden. Neben G_4 und G_6 sind im Anhang noch die als Anfangsgrößen in die Maschine eingegebenen C_{31} bis C_{34} enthalten und die berechneten D_{41} bis D_{45} und C_{41} bis C_{45} .

Die Rechnung wurde mit A_{ij} und B_{ij} als Parameter bis zu C_{71} bis C_{78} durchgeführt. Dann reichte die Speicherkapazität der Maschine nicht mehr aus. Es wurden alle bisher ausgerechneten Koeffizienten der Ljapunow-Funktion (bis C_{78}) als bekannt angenommen; diese wurden auch als Parameter der weiteren Rechnung in (4.20) zugrunde gelegt.

⁺⁾ Lit. [5]

Auf diese Weise konnte G_8 , G_{10} , bis G_{12} gewonnen und die Koeffizienten der Ljapunow-Funktion bis $C_{11,12}$ berechnet werden. Dabei erhält man die für die Praxis wichtige Abhängigkeit der Kriteriumsgrößen, insbesondere von den Koeffizienten des Differentialgleichungssystems.

All diese Ergebnisse der Maschine sind sehr umfangreich und können im Rahmen dieser Arbeit nicht veröffentlicht werden. Sie waren aber für die theoretischen Untersuchungen in dieser Arbeit als Hilfsmittel von großem Nutzen.

6. Der Lückensatz

Mit Hilfe der Ergebnisse der elektronischen Rechenanlagen konnten heuristische Untersuchungen über das Stabilitätsverhalten der Nulllösung des Differentialgleichungssystems (2.1) durchgeführt werden. Dabei interessierte insbesondere der Fall, bei dem alle Kriteriumsgrößen gleich Null sind. Dazu ist hinreichend, daß in den Polynomen, die die rechten Seiten der Differentialgleichungen darstellen, gewisse Koeffizienten verschwinden. Es treten also in der rechten Seite des Differentialgleichungssystems (2.1) Lücken auf, während die restlichen Koeffizienten beliebig gewählt werden können. Die Bedingungen für diese Lücken sind im Lückensatz zusammengefaßt:

Lückensatz: Die ungestörte Bewegung des Differentialgleichungssystems (2.1) ist *s t e t s* stabil, wenn eine der folgenden Bedingungen über die Koeffizienten A_{ij} und B_{ij} der Differentialgleichungen erfüllt ist ($j \leq i+1$):

- | | | |
|----|--------------|---------------------|
| a) | $A_{ij} = 0$ | für j gerade |
| | $B_{ij} = 0$ | für $i+j$ ungerade, |
| b) | $A_{ij} = 0$ | für $i+j$ ungerade |
| | $B_{ij} = 0$ | für j gerade, |

- c) $A_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$,
 $B_{ij} = 0$
- d) $A_{ij} = 0$ für alle $j \neq 1$.
 $B_{ij} = 0$

Hierbei dürfen die verbleibenden Koeffizienten beliebige reelle Werte annehmen.

Für die Koeffizienten C_{ij} der nach der Rekursionsformelkette (4.20) zugehörigen Ljapunow-Funktion gilt dann in den entsprechenden Fällen notwendig:

- a) $C_{ij} = 0$ für $i+j$ gerade; $j \leq i+1$
- b) $C_{ij} = 0$ für j gerade; $j \leq i+1$
- c) $C_{ij} = 0$ für j mit $2 \leq j \leq i$
- d) $C_{ij} = 0$ für j mit $2 \leq j \leq i$

$$C_{i1} = \frac{2}{i\lambda} B_{i-1,1}$$

$$C_{i,i+1} = -\frac{2}{i\lambda} A_{i-1,1}$$

Dieser heuristisch gefundene Satz wird in Abschnitt 8 bewiesen.

7. Ableitung einiger Hilfssätze aus den Formeln der Rekursionsformelkette

Aus den Formeln (4.11), (4.12), (4.17), (4.18), (4.19) und (4.19a) ersieht man, daß C_{nm} und G_n als Linearkombinationen der D_{nj} dargestellt werden können.

Hilfssatz 1

Für G_n gibt (4.17) unmittelbar eine Darstellung der Form

$$G_n = \sum_{j=1}^{n+1} L_{nj} D_{nj} \quad (7.1)$$

mit $L_{nj} = 0$ für j gerade.

Sie sagt, daß sicher G_n verschwindet wenn alle D_{nj} mit ungeradem zweiten Index verschwinden. Diese Aussage wird im folgenden als Hilfssatz 1 verwendet.

Hilfssatz 2

Setzt man zusammenfassend für (4.11), (4.12), (4.18), (4.19) und (4.19a)

$$C_{nm} = \sum_{j=1}^{n+1} K_{nj}^{(m)} D_{nj}, \quad (7.2)$$

so ist $K_{nj}^{(m)} = 0$ für $m + j$ gerade.

Zum Beweise setzt man für die Summe der zweiten Indizes von C_{nm} und D_{nj} in jeder dieser Formeln $p = m + j$. Das ergibt:

in (4.11)	$p_1 = 2w + 2r - 1$
in (4.12)	$p_2 = 2w - 1 + 2r$
in (4.19)	$p_3 = 1 + 2$
in (4.19a)	$p_4 = 2w + 1 + 2r$

In Formel (4.18) kommen auf der rechten Seite in der eckigen Klammer nur D_{nj} mit ungeradem j vor, da nach Hilfssatz 1 auch G_n eine

Linearkombination aus D_{nj} mit ungeradem j ist:

$$p_5 = 2w + 2r - 1.$$

Es sind also alle Summen p_1 bis p_5 für alle w und r ungerade. Daraus folgt, daß in dem Ansatz (7.2) alle Glieder mit gerader Indexsumme $j+m$ wegfallen.

Hilfssatz 3

In der Linearkombination (7.2) gilt außerdem:

$$K_{n2}^{(m)} = 0 \quad \text{für alle } m \neq 1$$

$$K_{nn}^{(m)} = 0 \quad \text{für alle } m \neq n + 1.$$

Der Satz besagt, daß D_{n2} nur in der Gleichung für C_{n1} und daß D_{nn} nur in der Gleichung für $C_{n,n+1}$ vorkommt.

Beweis:

Für ungerades n kommt D_{n2} nur in (4.12) und D_{nn} nur in (4.11) vor.

In (4.12) muß $r = 1$ sein, damit in $D_{n,2r}$ der zweite Index gleich 2 ist. $r = 1$ kann aber in der Summe des Zählers von (4.12) nur auftreten, wenn $w \leq 1$ ist, also folgt $w = 1$. Daher kann in (4.12) nur für $w = 1$ ein D_{n2} vorkommen; dies liefert nur C_{n1} .

In (4.11) muß $r = \frac{n+1}{2}$ sein, damit in $D_{n,2r-1}$ der zweite Index gleich n ist. $r = \frac{n+1}{2}$ kann aber in der Summe des Zählers von dieser Formel nur auftreten, wenn $w \geq \frac{n+1}{2}$ ist. Nach der Bedingung für w in (4.11) ist aber w höchstens gleich $\frac{n+1}{2}$. Daher kann in (4.11) nur für $w = \frac{n+1}{2}$ ein D_{nn} vorkommen; dann erhält man nur $C_{n,n+1}$. Damit ist Hilfssatz 3 für ungerades n bewiesen.

Für gerades n kommt D_{n2} und D_{nn} nicht in (4.18) vor, wohl aber in (4.19) und (4.19a).

Nach (4.19) sieht man sofort, daß die erste Behauptung des Hilfssatzes 3 erfüllt ist. In (4.19a) kommt kein D_{n2} vor. Es müßte $r = 1$ sein. Dies kann aber nur bei $w = 1$ eintreten, was der Bedingung für w

in (4.19a) widersprechen würde. Damit ist bewiesen, daß D_{n2} nur in (4.19) vorkommt.

Die zweite Behauptung folgt so: In (4.19a) muß $r = \frac{n}{2}$ sein, damit in $D_{n,2r}$ der zweite Index gleich n ist. $r = \frac{n}{2}$ kann aber dort nur in der Summe des Zählers auftreten, wenn $w \geq \frac{n}{2}$ ist. Nach der Bedingung für w in dieser Formel ist aber w höchstens gleich $\frac{n}{2}$, also folgt $r = \frac{n}{2}$. Daher kann in (4.19a) nur für $w = \frac{n}{2}$ ein D_{nn} vorkommen; dies liefert nur $C_{n,n+1}$.

Mithin ist Hilfssatz 3 bewiesen.

8. Beweis des Lückensatzes

Es muß gezeigt werden, daß alle Kriteriumsgrößen G_n verschwinden. Der Beweis der einzelnen Fälle des Lückensatzes wird in zwei Schritten durchgeführt.

Erstens wird bewiesen, daß die nach (4.20) bestimmten C_{ij} in jedem einzelnen Falle die im Lückensatz behaupteten Bedingungen erfüllen.

Zweitens wird bewiesen, wenn die Koeffizienten C_{ij} der Ljapunow-Funktion diese Form haben, werden a l l e Kriteriumsgrößen G_n gleich Null.

Beweis des Falles a:

I. Vollständige Induktion

I.1 Induktionsverankerung: Die ausführliche Matrizenschreibweise der Formel (4.4) für $n=3$ unter Berücksichtigung der Bedingung a des Lückensatzes lautet:

$$\begin{pmatrix} A_{23} \\ 0 \\ A_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}_3.$$

Daraus ergibt sich

$$\mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 2A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 2B_{22} & 0 \\ 2A_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Matrix $\mathcal{V}_3$ folgt nach (4.5)

$$\begin{aligned} D_{31} &= 2A_{23} & D_{33} &= 2A_{21} + 2B_{22} \\ D_{32} &= 0 & D_{34} &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse in (4.11) und (4.12) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} C_{31} &= 0 & C_{33} &= 0 \\ C_{32} &= -\frac{2}{\lambda} A_{23} & C_{34} &= -\frac{2}{3\lambda} (2A_{23} + A_{21} + B_{22}), \end{aligned}$$

also:

$$C_{3j} = 0 \quad \text{für } 3+j \text{ gerade, } j \leq 4 \quad (8.1)$$

Dies ist aber die Bedingung für die Koeffizienten C_{nj} der zu Fall a. gehörenden Ljapunow-Funktion für $n=3$. Die Induktionsvoraussetzung ist also für $n=3$ erfüllt.

I.2 Die Induktionsvoraussetzung ist:

$$\left. \begin{aligned} C_{pm} &= 0 \quad \text{für alle } 3 \leq p \leq n, \quad 1 \leq m \leq p+1, \quad p+m \text{ gerade} \\ A_{ij} &= 0 \quad \text{für } j \text{ gerade} \\ B_{ij} &= 0 \quad \text{für } i+j \text{ ungerade} \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} j \leq i+1; \quad i \geq 2. \\ \end{matrix} \quad (8.2)$$

Behauptung:

$$C_{n+1,m} = 0 \quad \text{für } 1 \leq m \leq n+2; \quad n+1+m \text{ gerade.} \quad (8.3)$$

Aus (8.2) erhält man nach (4.4)

$$\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{A}_n \mathcal{L}_n^{(1)} + \mathcal{L}_n \mathcal{L}_n^{(2)}. \quad (8.4)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n &= (a_{ij}^{(n)}) & \mathcal{L}_n &= (b_{ij}^{(n)}) \\ \mathcal{L}_n^{(1)} &= (c_{ij}^{(1)}) & \mathcal{L}_n^{(2)} &= (c_{ij}^{(2)}) \end{aligned} \quad (8.5)$$

die im Abschnitt 3 gebildeten Matrizen. Für sie gilt nach (3.1) bis (3.4) mit (8.2)

für $i \leq n+1$; $j \leq n-1$; $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{in (3.1)} \quad a_{ij}^{(n)} &= 0 & \text{für } n+i+j \text{ ungerade,} \\ \text{in (3.2)} \quad b_{ij}^{(n)} &= 0 & \text{für } n+i+j \text{ gerade} \\ \text{und für } i \leq n-1; \quad j \leq n+1; \quad n \geq 2 \\ \text{in (3.3)} \quad c_{ij}^{(1)} &= 0 & \text{für } i+j \text{ ungerade,} \\ \text{in (3.4)} \quad c_{ij}^{(2)} &= 0 & \text{für } i+j \text{ gerade.} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Die Elemente $d_{ij}^{(n+1)}$ von $\mathcal{V}_{n+1}^0$ aus (8.4) lauten

$$d_{ij}^{(n+1)} = \sum_{l=1}^{n-1} a_{il}^{(n)} c_{lj}^{(1)} + \sum_{l=1}^{n-1} b_{il}^{(n)} c_{lj}^{(2)}, \quad i, j \leq n+1. \quad (8.7)$$

Das Produkt $a_{il}^{(n)} c_{lj}^{(1)}$ ist nur von Null verschieden, wenn beide Faktoren nicht verschwinden. Nach (8.6) müssen dann $(i+l+n)$ und $(l+j)$ gerade sein, was gerades $(i+j+n)$ erfordert. Also verschwindet das Produkt für ungerades $(i+j+n)$.

Ebenso zeigt man: Wegen $b_{il}^{(n)} = 0$ für gerades $(n+i+l)$ und $c_{lj}^{(2)} = 0$ für gerades $(l+j)$ folgt $b_{il}^{(n)} c_{lj}^{(2)} = 0$ für ungerades $n+i+j$.

Es folgt also daher nach (8.7)

$$d_{ij}^{(n+1)} = 0 \quad \text{für ungerades } (n+i+j); \quad i, j \leq n+1. \quad (8.8)$$

Die $D_{n+1,m}$ erhält man nach (4.5)

$$D_{n+1,m} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=m+1}}^{n+1} d_{ij}^{(n+1)} \quad m \leq n+2,$$

so daß sich

$$D_{n+1,m} = 0 \quad \text{für } n+1+m \text{ ungerade, } m \leq n+2 \quad (8.9)$$

ergibt.

Wegen $i+j = m+1$ ist nämlich $(i+j+m+1)$ gerade; außerdem ist $(n+i+j)$ in (8.8) ungerade, so daß sich mit der Fallunterscheidung bezüglich $(i+j)$ ergibt, daß für ungerades $(n+m+1)$ die Gleichung (8.9) gilt.

In der Linearkombination

$$C_{n+1,m} = \sum_{j=1}^{n+2} K_{n+1,j}^{(m)} D_{n+1,j} \quad m \leq n+2$$

ist $D_{n+1,j} = 0$ für ungerades $(n+1+j)$ nach (8.9), also bleiben nur die Glieder mit geradem $(n+1+j)$. Die zugehörigen Koeffizienten $K_{n+1,j}^{(m)}$ verschwinden aber nach Hilfssatz 2 für gerades $(m+j)$; also verschwindet die ganze Summe, wenn $(n+1+m)$ gerade ist. Damit ist die Behauptung (8.3) bewiesen.

II. Nach (8.9) ist $D_{nj} = 0$ für ungerades $n+j$; $j \leq n+1$. In (7.1) verschwinden rechts alle Glieder mit ungeradem $n+j$, also da n gerade ist, mit ungeradem j ; die Glieder mit geradem j verschwinden aber ebenfalls, da nach Hilfssatz 1 gilt $L_{nj} = 0$ für gerades j . Also gilt $G_n \equiv 0$ für alle geraden n , was zu beweisen war.

Beweis des Falles b

I. Vollständige Induktion

I.1 Induktionsverankerung: Die ausführliche Matrizenschreibweise von (4.4) für $n=3$ im Fall b lautet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ A_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2 \ 0 \ 0) \quad + \quad \begin{pmatrix} B_{21} \\ 0 \\ B_{23} \end{pmatrix} \quad (0 \ 2 \ 0) = \mathcal{Q}_3$$

Daraus ergibt sich

$$\mathcal{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2B_{21} & 0 \\ 2A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 2B_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Matrix $\mathcal{Q}_3$ folgt nach (4.5)

$$\begin{aligned} D_{31} &= 0 & D_{33} &= 0 \\ D_{32} &= 2B_{21} + 2A_{22} & D_{34} &= 2B_{23} \end{aligned}.$$

Setzt man diese Ergebnisse in (4.11) und (4.12) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} C_{31} &= \frac{2}{3\lambda} (2B_{23} + B_{21} + A_{22}) & C_{33} &= \frac{2}{\lambda} B_{23} \\ C_{32} &= 0 & C_{34} &= 0, \end{aligned}$$

also

$$C_{3j} = 0 \quad \text{für } j \text{ gerade, } j \leq 4. \quad (8.10)$$

Dies ist aber die Bedingung für die Koeffizienten C_{nj} der zu Fall b gehörenden Ljapunow-Funktion für $n=3$.

I.2 Die Induktionsvoraussetzung ist:

$$\begin{aligned} C_{pm} &= 0 \quad \text{für alle } 3 \leq p \leq n, \quad 1 \leq m \leq p+1, \quad m \text{ gerade} \\ A_{ij} &= 0 \quad \text{für } i+j \text{ ungerade} \\ B_{ij} &= 0 \quad \text{für } j \text{ gerade} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} j \leq i+1; i \geq 2. \end{array} \quad (8.11)$$

Behauptung:

$$C_{n+1,m} = 0 \quad \text{mit } 1 \leq m \leq n+2; \quad m \text{ gerade.} \quad (8.12)$$

Aus (8.11) erhält man nach (4.4) die Formel (8.7) mit den Matrizen (8.8). Für sie gilt nach (3.1) bis (3.4) mit (8.11)

für $i \leq n+1; \quad j \leq n-1; \quad n \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{in (3.1)} \quad a_{ij}^{(n)} &= 0 && \text{für } i \text{ ungerade,} \\ \text{in (3.2)} \quad b_{ij}^{(n)} &= 0 && \text{für } i \text{ gerade} \\ \text{und für } i \leq n-1; \quad j \leq n+1; \quad n \geq 2 \\ \text{in (3.3)} \quad c_{ij}^{(1)} &= 0 && \text{für } j \text{ gerade,} \\ \text{in (3.4)} \quad c_{ij}^{(2)} &= 0 && \text{für } j \text{ ungerade.} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Die Elemente $d_{ij}^{(n+1)}$ von $\mathcal{J}_{n+1}$ sind durch (8.7) bestimmt.

Das Produkt $a_{il}^{(n)} c_{lj}^{(1)}$ ist nur von Null verschieden, wenn beide Faktoren nicht verschwinden. Nach (8.13) muß dann i gerade und j ungerade sein, was ungerades $(i+j)$ erfordert. Also verschwindet das Produkt für gerade $(i+j)$.

Ebenso zeigt man: Wegen $b_{il}^{(n)} = 0$ für gerades i und $c_{lj}^{(2)} = 0$ für ungerades j folgt $b_{il}^{(n)} c_{lj}^{(2)} = 0$ für gerades $(i+j)$.

Es ist also nach (8.7)

$$d_{ij}^{(n+1)} = 0 \quad \text{für gerades } i+j; \quad i, j \leq n+1 \quad (8.14)$$

Dies ergibt nach (4.5)

$$D_{n+1,m} = 0 \quad \text{für } m \text{ ungerade; } m \leq n+2 \quad . \quad (8.15)$$

Wegen $i+j = m+1$ in (4.5) ist $(i+j+m+1)$ gerade; außerdem ist $(i+j)$ in (8.14) gerade, so daß sich mit Fallunterscheidung bezüglich $(i+j)$ ergibt, daß für ungerades m die Gleichung (8.15) gilt.

In der Linearkombination

$$C_{n+1,m} = \sum_{j=1}^{n+2} K_{n+1,j}^{(m)} D_{n+1,j} \quad m \leq n+2$$

ist $D_{n+1,j} = 0$ für ungerades j nach (8.15), also bleiben nur die Glieder mit geradem j . Die zugehörigen Koeffizienten $K_{n+1,j}^{(m)}$ verschwinden aber nach Hilfssatz 2 für gerades $(m+j)$; also verschwindet die ganze Summe, wenn m gerade ist. Damit ist bewiesen, daß die Koeffizienten der Ljapunow-Funktion die in (8.11) angegebene Form haben.

- II. Nach (8.15) ist $D_{nj} = 0$ für ungerades j ; $j \leq n+1$. In (7.1) verschwinden rechts alle Glieder mit ungeradem j ; die Glieder mit geradem j verschwinden aber ebenfalls, da nach Hilfssatz 1 gilt $L_{nj} = 0$ für gerades j und gerades n . Also gilt $G_n = 0$ für alle geraden n , was zu beweisen war.

Beweis des Falles c

I. Vollständige Induktion

I.1 Induktionsverankerung: Hier lautet die Formel (4.4) für $n=3$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ A_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{J}_3 \quad .$$

Daraus ergibt sich

$$\mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2A_{22} & 2B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Matrix $\mathcal{V}_3^0$ folgt nach (4.5)

$$\begin{aligned} D_{31} &= 0 & D_{33} &= 2B_{22} \\ D_{32} &= 2A_{22} & D_{34} &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse in (4.11) und (4.12) ein, so erhält man :

$$\begin{aligned} C_{31} &= \frac{2}{3\lambda} A_{22} & C_{33} &= 0 \\ C_{32} &= 0 & C_{34} &= -\frac{2}{3\lambda} B_{22} \end{aligned}$$

also

$$C_{3j} = 0 \quad \text{mit} \quad 2 \leq j \leq 3 \quad . \quad (8.16)$$

Dies ist aber die Bedingung für die Koeffizienten C_{nj} der zu Fall c gehörenden Ljapunow-Funktion.

I.2 Induktionsvoraussetzung :

$$C_{pm} = 0 \quad \text{für alle } 3 \leq p \leq n, \quad 2 \leq m \leq p \quad (8.17)$$

$$A_{ij} = 0 \text{ und } B_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j; \quad j \leq i+1; \quad i \geq 2 \quad .$$

Behauptung:

$$C_{n+1,m} = 0 \quad \text{für } 2 \leq m \leq n+1 \quad . \quad (8.18)$$

Aus (8.17) erhält man nach (4.4) die Formel (8.7) mit den Matrizen (8.8). Für sie gilt nach (3.1) bis (3.4) mit (8.17)

$$\begin{aligned} &\text{für } i \leq n+1; \quad j \leq n-1; \quad n \geq 2 \\ &\text{in (3.1)} \quad a_{rs}^{(n)} = 0 \quad \text{für } r \neq 2 \\ &\text{in (3.2)} \quad b_{rs}^{(n)} = 0 \quad \text{für } s+r-n \neq 1 \\ &\text{und für } i \leq n-1; \quad j \leq n+1; \quad n \geq 2 \\ &\text{in (3.3)} \quad c_{rs}^{(1)} = 0 \quad \text{für } s \neq 1 \\ &\text{in (3.4)} \quad c_{rs}^{(2)} = 0 \quad \text{für } s \neq r+1 \end{aligned} \quad (8.19)$$

Die Elemente $d_{ij}^{(n+1)}$ von $\mathcal{D}_{n+1}$ sind durch (8.7) bestimmt. Wegen $a_{il}^{(n)} = 0$ für $l \neq 2$ und $c_{lj}^{(1)} = 0$ für $j \neq 1$ folgt $a_{il}^{(n)} c_{lj}^{(1)} \neq 0$ für $l = 2$ und $j = 1$. Wegen $b_{il}^{(n)} = 0$ für $l+i-n \neq 1$ und $c_{lj}^{(2)} = 0$ für $l \neq j-1$ folgt $b_{il}^{(n)} c_{lj}^{(2)} \neq 0$ für $l+j-n = 2$.

$d_{ij}^{(n+1)}$ ist also nur von Null verschieden für $i=2, j=1$ oder für $i+j-n = 2$.

Dies ergibt nach (4.5) durch die Bedingung $i+j = m+1$

$$D_{n+1,m} = 0 \quad \text{für } m \neq 2, n+1; \quad m \leq n+2. \quad (8.20)$$

Nach Hilfssatz 3 können deswegen nur $C_{n+1,1}$ und $C_{n+1,n+2}$ von Null verschieden sein.

Es gilt also

$$C_{n+1,m} = 0 \quad \text{mit } 2 \leq m \leq n+1.$$

Dies ist aber die Behauptung (8.18).

II. Nach (8.20) ist $D_{nj} = 0$ für $j \neq 2, n$. In (7.1) verschwinden also alle Glieder mit $j \neq 2, n$; die restlichen Glieder verschwinden ebenfalls, da nach Hilfssatz 1 gilt $L_{nj} = 0$ für gerades j und gerades n . Also gilt $G_n \equiv 0$ für alle geraden n , was zu beweisen war.

Beweis des Falles d

I. Vollständige Induktion

I.1 Induktionsverankerung: Formel (4.4) für $n=3$ unter Berücksichtigung der Bedingung d des Lückensatzes lautet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{D}_3.$$

Daraus ergibt sich

$$\mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2A_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Aus der Matrix folgt nach (4.5)

$$\begin{aligned} D_{31} &= 0 & D_{33} &= 2A_{21} \\ D_{32} &= 2B_{21} & D_{34} &= 0 \end{aligned} .$$

Setzt man diese Ergebnisse in (4.11) und (4.12) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} C_{31} &= \frac{2}{3\lambda} B_{21} & C_{33} &= 0 \\ C_{32} &= 0 & C_{34} &= -\frac{2}{3\lambda} A_{21} \end{aligned} ,$$

also

$$\begin{aligned} C_{3j} &= 0 \quad \text{mit } 2 \leq j \leq 3 \\ C_{31} &= \frac{2}{3\lambda} B_{21} , \quad C_{34} = -\frac{2}{3\lambda} A_{21} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Dies ist aber die Bedingung für die C_{nj} der zu Fall d gehörenden Ljapunow-Funktion für $n=3$.

I.2 Induktionsvoraussetzung:

$$\left. \begin{aligned} C_{pm} &= 0 \\ C_{p1} &= \frac{2}{p\lambda} B_{p-1,1} \\ C_{p,n+1} &= -\frac{2}{p\lambda} A_{p-1,1} \end{aligned} \right\} \quad \text{für alle } 3 \leq p \leq n; \quad 2 \leq m \leq p \quad (8.22)$$

$$A_{ij} = 0 \quad \text{und} \quad B_{ij} = 0 \quad \text{für } j \neq 1; \quad j \leq i+1; \quad i \geq 2 .$$

Behauptung:

$$\begin{aligned} C_{n+1,m} &= 0 \quad \text{mit } 2 \leq m \leq n+1 \\ C_{n+1,1} &= \frac{2}{(n+1)\lambda} B_{n1} , \quad C_{n+1,n+2} = -\frac{2}{(n+1)\lambda} A_{n1} \end{aligned} \quad (8.23)$$

Aus (8.22) erhält man nach (4.4) die Formel (8.7) mit den Matrizen (8.8). Für sie gilt nach (3.1) bis (3.4) mit (8.22)

für $r \leq n+1$, $s \leq n-1$; $n \geq 2$

in (3.1)

$$a_{rs}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r+s-n \neq 2 \\ A_{r-1,1} & \text{für } r+s-n = 2 \end{cases}$$

in (3.2)

$$b_{rs}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{für } r \neq 1 \\ B_{n-s+1,r} & \text{für } r = 1 \end{cases}$$

und für $r \leq n-1$, $s \leq n+1$; $n \geq 2$

in (3.3)

$$c_{rs}^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{für } s \neq 1 \\ 2 & \text{für } s = 1, r = 1 \\ \frac{2}{\lambda} B_{rs} & \text{für } s = 1, r > 1 \end{cases}$$

in (3.4)

$$c_{rs}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{für } s \neq r+1 \\ 2 & \text{für } s = r+1, r = 1 \\ -\frac{2}{\lambda} A_{rs} & \text{für } s = r+1, r > 1 \end{cases}$$

(8.24)

Die Elemente von $\mathcal{V}_{n+1}$ berechnen sich nach (8.7):

$$d_{rs}^{(n+1)} = {}^1d_{rs}^{(n+1)} + {}^2d_{rs}^{(n+1)} \quad r, s \leq n+1$$

(8.25)

$$\text{mit } {}^1d_{rs}^{(n+1)} = \sum_{l=1}^{n-1} a_{rl}^{(n)} c_{ls}^{(1)}, \quad {}^2d_{rs}^{(n+1)} = \sum_{l=1}^{n-1} b_{rl}^{(n)} c_{ls}^{(2)}.$$

Nach (8.24) ist nur $a_{rl}^{(n)} \neq 0$ für $r+l-n = 2$ und nur $c_{ls} \neq 0$ für $s = 1$. Aus $1 \leq l \leq n-1$ und $r = 2+n-l$ folgt $3 \leq r \leq n+1$, also

$$\begin{aligned} a_{r,2-r+n}^{(n)} &= A_{r-1,1} & \text{mit } 3 \leq r \leq n+1 \\ c_{2-r+n,1}^{(1)} &= \begin{cases} 2 & \text{für } r = n+1 \\ \frac{2}{\lambda} B_{2-r+n,1} & \text{mit } 3 \leq r \leq n \end{cases} \end{aligned} \quad (8.26)$$

Aus diesen Faktoren bestehen die nicht verschwindenden Produkte $a_{rl}^{(n)} c_{ls}^{(1)}$ in (8.25).

Nach (8.25) ergibt sich somit

$$d_{r1}^{(n+1)} = \begin{cases} 2A_{r-1,1} & \text{mit } r = n+1 \\ \frac{2}{\lambda} A_{r-1,1} B_{2-r+n,1} & \text{mit } 3 \leq r \leq n \end{cases} \quad (8.27)$$

und nach (8.25) mit (8.24) ist

$$d_{rs}^{(n+1)} = 0 \quad \begin{cases} \text{für } s \neq 1 \\ \text{für } s = 1; \quad r = 1, 2 \end{cases} \quad (8.28)$$

Nach (8.24) ist nur $b_{r1}^{(n)} \neq 0$ für $r = 1$ und nur $c_{1s}^{(2)} \neq 0$ für $s = 1+1$. Aus $1 \leq l \leq n-1$ und $s = l+1$ folgt $2 \leq s \leq n$, also

$$\begin{aligned} b_{1,s-1}^{(n)} &= B_{n-s+2,1} & \text{mit } 2 \leq s \leq n \\ c_{s-1,s}^{(2)} &= \begin{cases} 2 & \text{mit } s = 2 \\ -\frac{2}{\lambda} A_{s-1,1} & \text{mit } 3 \leq s \leq n \end{cases} \end{aligned} \quad (8.29)$$

Aus diesen Faktoren bestehen die nicht verschwindenden Produkte $b_{rl}^{(n)} c_{ls}^{(2)}$ in (8.25).

Nach (8.25) ergibt sich somit:

$$d_{1s}^{(n+1)} = \begin{cases} 2B_{n-s+2,1} & \text{für } s = 2 \\ -\frac{2}{\lambda} A_{s-1,1} B_{n-s+2,1} & \text{mit } 3 \leq s \leq n \end{cases} \quad (8.30)$$

und nach (8.25) mit (8.24) ist

$$d_{rs}^{(n+1)} = 0 \quad \begin{cases} \text{für } r \neq 1 \\ \text{für } r = 1; \quad s = 1, n+1 \end{cases} \quad (8.31)$$

Wegen $z_{d_{r1}}^{(n+1)} = 0$ für $r \neq 1$ und $z_{d_{1s}}^{(n+1)} = 0$ für $s \neq 1$ ist nach (8.26)

$$d_{r1}^{(n+1)} = z_{d_{r1}}^{(n+1)} \quad \text{für } 3 \leq r \leq n+1$$

$$d_{1s}^{(n+1)} = z_{d_{1s}}^{(n+1)} \quad \text{für } 2 \leq s \leq n$$

Für $r = s$ haben $d_{r1}^{(n+1)}$ und $d_{1s}^{(n+1)}$ die gleiche untere Indexsumme. (4.5) ergibt nach Einsetzen von (8.27) und (8.30)

$$d_{r1}^{(n+1)} + d_{1s}^{(n+1)} = 0 \quad \text{für } r = s; 3 \leq r, s \leq n;$$

also

$$D_{n+1,m} = 0 \quad \text{für } 3 \leq m \leq n.$$

Für $m = 2$ und $m = n+1$ erhält man

$$D_{n+1,2} = 2B_{n1} \quad \text{und} \quad D_{n+1,n+1} = 2A_{n1},$$

da in (4.5) in der Summe rechts nur $d_{1s}^{(n+1)} = 2B_{n-s+2}$ für $s = 2$ bzw. $d_{r1}^{(n+1)} = 2A_{r-1,1}$ für $r = n+1$ übrigbleibt.

Wegen (8.28) und (8.31) verschwinden

$$D_{n+1,1} = 0, \quad D_{n+1,n+2} = 0.$$

Es gilt zusammenfassend:

$$D_{n+1,m} = 0 \quad \text{für } m \neq 2, n+1, \quad (8.32)$$

$$D_{n+1,n+1} = 2A_{n1}, \quad D_{n+1,2} = 2B_{n1}. \quad (8.33)$$

Nach Hilfssatz 3 können deswegen nur $C_{n+1,1}$ und $C_{n+1,n+2}$ von Null verschieden sein. Unter Berücksichtigung von (8.32) ergibt sich nach (4.11) und (4.19)

$$C_{n+1,1} = \frac{D_{n+1,2}}{(n+1)!} \quad \text{für alle } n \geq 2 \quad (8.34)$$

und nach (4.12) und (4.19a)

$$C_{n+1,n+1} = - \frac{D_{n+1,n+1}}{(n+1)\lambda} \quad \text{für alle } n \geq 2; \quad (8.35)$$

daraus erhält man zusammen mit (8.33)

$$C_{n+1,1} = \frac{2}{(n+1)\lambda} B_{n1}, \quad C_{n+1,n+1} = - \frac{2}{(n+1)\lambda} A_{n1}.$$

Mit $C_{n+1,m} = 0$ für $2 \leq m \leq n+1$

ist dies die Behauptung (8.24).

II. Nach (8.31) ist $D_{nj} = 0$ für $j \neq 2, n$. In (7.1) verschwinden also alle Glieder mit $j \neq 2, n$; die restlichen Glieder verschwinden ebenfalls, da nach Hilfssatz 1 gilt $L_{nj} = 0$ für gerades j und gerades n . Also gilt $G_n \equiv 0$ für alle geraden n , was zu beweisen war.

9. Eine Vermutung

Auf Grund der Ergebnisse der elektronischen Rechenanlage konnte eine Vermutung aufgestellt werden: Stabilität der Nullösung kann auch durch eine gewisse Symmetrie der Koeffizienten der Differentialgleichungen (2.1) erzielt werden. Dieser bis zur 11. Näherung heuristisch gefundene Satz, dessen Beweis noch nicht gelungen ist, wird hier nur aufgeführt.

Die ungestörte Bewegung des Differentialgleichungssystems (2.1) ist stets stabil, wenn zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichungen folgende Bedingung erfüllt ist:

$$B_{ij} = (-1)^i A_{ij} \quad \text{für alle } j \leq i+1, \quad i \geq 2.$$

Für die Koeffizienten C_{ij} der zugehörigen Ljapunow-Funktion gilt dann notwendig

$$C_{ij} = (-1)^i C_{i,i-j+2} \quad \text{für alle } j \leq i+1, \quad i \geq 2$$

Anhang

- 35 -

EINGABE DER AUSDRUECKE C31, C32, C33, C34
-----DEFINITION $C31A = .66667 * \$1/LA$ DEFINITION $C31B = 2. * B23 + B21 + A22$ ZU BERECHNEN $C31 = C31A * C31B$

C31 =

0.66667	A22	\$1/LA
0.66667	B21	\$1/LA
1.33334	B23	\$1/LA

DEFINITION $C32 = - 2. * A23 * \$1/LA$ DEFINITION $C33 = 2. * B23 * \$1/LA$ DEFINITION $C34B = 2. * A23 + A21 + B22$ ZU BERECHNEN $C34 = - C31A * C34B$

C34 =

-0.66667	A21	\$1/LA
-1.33334	A23	\$1/LA
-0.66667	B22	\$1/LA

BEGINN DER RECHNUNG

BERECHNUNG VON D41, D42, D43, D44, D45

ZU BERECHNEN $D41 = 3. \cdot A23 \cdot C31 + B21 \cdot C32 + 2. \cdot A34$

D41 =

2.00001	A22	A23	\$1/LA
4.00002	A23	B23	\$1/LA
2.00000	A34		

ZU BERECHNEN $D42 = 3. \cdot A22 \cdot C31 + B22 \cdot C32 + 2. \cdot A23 \cdot C32 + 2. \cdot B21 \cdot C33 + 2. \cdot A33 + 2. \cdot B31$

D42 =

2.00001	A22	A22	\$1/LA
2.00001	A22	B21	\$1/LA
4.00002	A22	B23	\$1/LA
-4.00000	A23	A23	\$1/LA
-2.00000	A23	B22	\$1/LA
4.00000	B21	B23	\$1/LA
2.00000	A33		
2.00000	B31		

ZU BERECHNEN $D43 = 3. \cdot A21 \cdot C31 + B23 \cdot C32 + 2. \cdot A22 \cdot C32 + 2. \cdot B22 \cdot C33 + A23 \cdot C33 + 3. \cdot B21 \cdot C34 + 2. \cdot A32 + 2. \cdot B32$

D43 =

2.00001	A21	A22	\$1/LA
4.00002	A21	B23	\$1/LA
-4.00000	A22	A23	\$1/LA
-4.00002	A23	B21	\$1/LA
-2.00001	B21	B22	\$1/LA

4.00000	B22	B23	\$1/LA
2.00000	A32		
2.00000	B32		

ZU BERECHNEN $D44 = 2. \cdot A21 \cdot C32 + 2. \cdot B23 \cdot C33 + A22 \cdot C33 + 3. \cdot B22 \cdot C34 + 2. \cdot A31$
 $+ 2. \cdot B33$

D44 =

-4.00000	A21	A23	\$1/LA
-2.00001	A21	B22	\$1/LA
2.00000	A22	B23	\$1/LA
-4.00002	A23	B22	\$1/LA
-2.00001	B22	B22	\$1/LA
4.00000	B23	B23	\$1/LA
2.00000	A31		
2.00000	B33		

ZU BERECHNEN $D45 = A21 \cdot C33 + 3. \cdot B23 \cdot C34 + 2. \cdot B34$

D45 =

-4.00002	A23	B23	\$1/LA
-2.00001	B22	B23	\$1/LA
2.00000	B34		

BERECHNUNG VON G4

DEFINITION $G4A = .125$

ZU BERECHNEN $G4B = 3 \cdot D41 + D43 + 3 \cdot D45$

G4B	=	2.00001	A21	A22	\$1/LA
		4.00002	A21	B23	\$1/LA
		2.00003	A22	A23	\$1/LA
		-4.00002	A23	B21	\$1/LA
		-2.00001	B21	B22	\$1/LA
		-2.00003	B22	B23	\$1/LA
		2.00000	A32		
		6.00000	A34		
		2.00000	B32		
		6.00000	B34		

ZU BERECHNEN $G4 = G4A \cdot G4B$

G4	=	0.25000	A21	A22	\$1/LA
		0.50000	A21	B23	\$1/LA
		0.25000	A22	A23	\$1/LA
		-0.50000	A23	B21	\$1/LA
		-0.25000	B21	B22	\$1/LA
		-0.25000	B22	B23	\$1/LA
		0.25000	A32		
		0.75000	A34		
		0.25000	B32		
		0.75000	B34		

BERECHNUNG VON C41, C42, C43, C44, C45

ZU BERECHNEN C41 = .25*D42 * \$1/LA

C41 =

0.50000	A22	A22	\$1/LA	\$1/LA
0.50000	A22	B21	\$1/LA	\$1/LA
1.00000	A22	B23	\$1/LA	\$1/LA
-1.00000	A23	A23	\$1/LA	\$1/LA
-0.50000	A23	B22	\$1/LA	\$1/LA
1.00000	B21	B23	\$1/LA	\$1/LA
0.50000	A33		\$1/LA	
0.50000	B31		\$1/LA	

ZU BERECHNEN C42A = - 5.*D41 + 3.*D45 + D43

C42A =

2.00001	A21	A22	\$1/LA	
4.00002	A21	B23	\$1/LA	
-14.00005	A22	A23	\$1/LA	
-4.00002	A23	B21	\$1/LA	
-32.00016	A23	B23	\$1/LA	
-2.00001	B21	B22	\$1/LA	
-2.00003	B22	B23	\$1/LA	
2.00000	A32			
-10.00000	A34			
2.00000	B32			
6.00000	B34			

ZU BERECHNEN C42 = G4A * C42A * \$1/LA

C42 =

0.25000	A21	A22	\$1/LA	\$1/LA
0.50000	A21	B23	\$1/LA	\$1/LA
-1.75001	A22	A23	\$1/LA	\$1/LA
-0.50000	A23	B21	\$1/LA	\$1/LA
-4.00002	A23	B23	\$1/LA	\$1/LA
-0.25000	B21	B22	\$1/LA	\$1/LA
-0.25000	B22	B23	\$1/LA	\$1/LA
0.25000	A32		\$1/LA	
-1.25000	A34		\$1/LA	
0.25000	B32		\$1/LA	
0.75000	B34		\$1/LA	

DEFINITION C43 = 0.

ZU BERECHNEN C44A = - 5.*D45 + 3.*D41 + D43

C44A =

2.00001	A21	A22	\$1/LA
4.00002	A21	B23	\$1/LA
2.00003	A22	A23	\$1/LA
-4.00002	A23	B21	\$1/LA
32.00016	A23	B23	\$1/LA
-2.00001	B21	B22	\$1/LA
14.00005	B22	B23	\$1/LA
2.00000	A32		
6.00000	A34		
2.00000	B32		
-10.00000	B34		

ZU BERECHNEN C44 = - G4A * C44A * \$1/LA

C44 =

-0.25000	A21	A22	\$1/LA	\$1/LA
-0.50000	A21	B23	\$1/LA	\$1/LA
-0.25000	A22	A23	\$1/LA	\$1/LA
0.50000	A23	B21	\$1/LA	\$1/LA
-4.00002	A23	B23	\$1/LA	\$1/LA
0.25000	B21	B22	\$1/LA	\$1/LA
-1.75001	B22	B23	\$1/LA	\$1/LA
-0.25000	A32		\$1/LA	
-0.75000	A34		\$1/LA	
-0.25000	B32		\$1/LA	
1.25000	B34		\$1/LA	

ZU BERECHNEN C45 = - .25 * D44 * \$1/LA

C45 =

1.00000	A21	A23	\$1/LA	\$1/LA
0.50000	A21	B22	\$1/LA	\$1/LA
-0.50000	A22	B23	\$1/LA	\$1/LA
1.00000	A23	B22	\$1/LA	\$1/LA
0.50000	B22	B22	\$1/LA	\$1/LA
-1.00000	B23	B23	\$1/LA	\$1/LA
-0.50000	A31		\$1/LA	
-0.50000	B33		\$1/LA	

BERECHNUNG VON G6

DEFINITION $G6A = .0625$

ZU BERECHNEN $G6B = 5 \cdot D61 + 5 \cdot D67 + D63 + D65$

ZU BERECHNEN $G6 = G6A \cdot G6B$

G6	=						Koeffizient als Bruch
		-0.10417	A21	A21	A21	A22	- 5/48
		-0.20833	A21	A21	A21	B23	- 5/24
		-0.79168	A21	A21	A22	A23	- 19/24
		-0.13542	A21	A21	A22	B22	- 13/96
		0.62501	A21	A21	A23	B21	5/8
		-1.37502	A21	A21	A23	B23	- 11/8
		0.31250	A21	A21	B21	B22	5/16
		-0.16667	A21	A21	B22	B23	- 1/6
		0.01042	A21	A22	A22	A22	1/96
		-0.30208	A21	A22	A22	B21	- 29/96
		-0.65626	A21	A22	A22	B23	- 21/32
		-1.97925	A21	A22	A23	A23	- 95/48
		-0.68751	A21	A22	A23	B22	- 11/16
		-0.31250	A21	A22	B21	B21	- 5/16
		-1.41668	A21	A22	B21	B23	- 17/12
		-0.03125	A21	A22	B22	B22	- 1/32
		-2.64588	A21	A22	B23	B23	- 127/48
		1.62505	A21	A23	A23	B21	13/8
		-3.00010	A21	A23	A23	B23	- 3
		1.41668	A21	A23	B21	B22	17/12
		-0.20839	A21	A23	B22	B23	- 5/24
		-0.62501	A21	B21	B21	B23	- 5/8

0.30208	A21	B21	B22	B22	29/36
-1.62505	A21	B21	B23	B23	- 13/8
0.28122	A21	B22	B22	B23	9/32
-2.58334	A21	B23	B23	B23	- 31/12
0.01045	A22	A22	A22	A23	1/36
-0.28122	A22	A22	A23	B21	- 9/32
-0.63538	A22	A22	A23	B23	- 61/36
0.03125	A22	A22	B21	B22	1/32
0.03125	A22	A22	B22	B23	1/32
-1.29182	A22	A23	A23	A23	- 31/24
-0.55215	A22	A23	A23	B22	- 53/36
0.16667	A22	A23	B21	B21	1/6
0.20839	A22	A23	B21	B23	5/24
-0.03125	A22	A23	B22	B22	- 1/32
-1.50003	A22	A23	B23	B23	- 3/2
0.13542	A22	B21	B21	B22	13/36
0.68751	A22	B21	B22	B23	11/16
0.55215	A22	B22	B23	B23	53/36
2.58334	A23	A23	A23	B21	31/12
-0.25007	A23	A23	A23	B23	- 1/4
2.64588	A23	A23	B21	B22	127/48
1.50003	A23	A23	B22	B23	3/2
0.20833	A23	B21	B21	B21	5/24
1.37502	A23	B21	B21	B23	11/8
0.65626	A23	B21	B22	B22	21/32
3.00010	A23	B21	B23	B23	3
0.63538	A23	B22	B22	B23	61/36
0.25007	A23	B23	B23	B23	1/4
0.10417	B21	B21	B21	B22	5/48
0.79168	B21	B21	B22	B23	19/24
-0.01042	B21	B22	B22	B22	- 1/36
1.97925	B21	B22	B23	B23	35/48

-0.01045	B22	B22	B22	B23	- 1/96
1.29182	B22	B23	B23	B23	31/24
-0.10417	A21	A21	A32		- 5/48
-0.93751	A21	A21	A34		- 15/16
-0.31250	A21	A21	B32		- 5/16
-0.31251	A21	A21	B34		- 5/16
0.17709	A21	A22	A31		17/96
0.19793	A21	A22	A33		19/96
0.15626	A21	A22	B31		5/32
-0.03125	A21	A22	B33		- 1/32
-0.47917	A21	A23	A32		- 23/48
-2.43759	A21	A23	A34		- 39/16
-0.89587	A21	A23	B32		- 43/48
-1.85421	A21	A23	B34		- 89/48
0.35417	A21	A31	B23		17/48
-0.13542	A21	A32	B22		- 13/96
-0.08333	A21	A33	B21		- 1/12
-0.02084	A21	A33	B23		- 1/48
-0.78125	A21	A34	B22		- 25/32
-0.08333	A21	B21	B33		- 1/12
-0.30209	A21	B22	B32		- 29/96
-0.61460	A21	B22	B34		- 59/96
0.31251	A21	B23	B31		5/16
-0.47914	A21	B23	B33		- 23/48
0.01042	A22	A22	A32		1/96
-0.05209	A22	A22	A34		- 5/96
-0.03125	A22	A22	B32		- 1/32
-0.09375	A22	A22	B34		- 3/32
0.13544	A22	A23	A31		13/96
0.23965	A22	A23	A33		23/96
0.19795	A22	A23	B31		19/96
-0.07292	A22	A23	B33		- 7/96
0.08333	A22	A31	B22		1/12

-0.30209	A22	A32	B21
-0.59377	A22	A32	B23
-0.61460	A22	A34	B21
-1.48963	A22	A34	B23
-0.13542	A22	B21	B32
-0.78125	A22	B21	B34
0.08333	A22	B22	B31
-0.42708	A22	B23	B32
-1.65629	A22	B23	B34
-1.16670	A23	A23	A32
-3.87513	A23	A23	A34
-1.54173	A23	A23	B32
-4.08348	A23	A23	B34
0.31251	A23	A31	B21
0.33344	A23	A31	B23
-0.42708	A23	A32	B22
-0.47914	A23	A33	B21
-0.41662	A23	A33	B23
-1.65629	A23	A34	B22
0.35417	A23	B21	B31
-0.02084	A23	B21	B33
-0.59377	A23	B22	B32
-1.48963	A23	B22	B34
0.33344	A23	B23	B31
-0.41662	A23	B23	B33
0.15626	A31	B21	B22
0.19795	A31	B22	B23
-0.31250	A32	B21	B21
-0.89587	A32	B21	B23
-0.03125	A32	B22	B22
-1.54173	A32	B23	B23
-0.03125	A33	B21	B22

- 29/36
- 19/32
- 59/36
- 143/36
- 13/36
- 25/32
1/12
- 41/36
- 159/36
- 7/6
- 31/8
- 37/24
- 49/12
5/16
1/3
- 41/36
- 23/48
- 5/12
- 159/36
17/48
- 1/48
- 19/32
- 143/36
1/3
- 5/12
5/32
19/36
- 5/16
- 43/48
- 1/32
- 37/24
- 1/32

-0.07292	A33	B22	B23
-0.31251	A34	B21	B21
-1.85421	A34	B21	B23
-0.09375	A34	B22	B22
-4.08348	A34	B23	B23
-0.10417	B21	B21	B32
-0.93751	B21	B21	B34
0.17709	B21	B22	B31
0.19793	B21	B22	B33
-0.47917	B21	B23	B32
-2.43759	B21	B23	B34
0.00042	B22	B22	B32
-0.05209	B22	B22	B34
0.13544	B22	B23	B31
0.23965	B22	B23	B33
-1.16670	B23	B23	B32
-3.87513	B23	B23	B34
0.20834	A21	A42	
0.12501	A21	A44	
0.08334	A21	B43	
0.83334	A21	B45	
0.12500	A22	A41	
0.04167	A22	A43	
-0.20833	A22	A45	
-0.08333	A22	B42	
0.29169	A23	A42	
0.37503	A23	A44	
-0.24997	A23	B41	
0.16669	A23	B43	
0.91674	A23	B45	
-0.03125	A31	A32	
-0.46875	A31	A34	
-0.15625	A31	B32	

-	7/36
-	5/16
-	89/48
-	3/32
-	49/12
-	5/48
-	15/16
	17/36
	19/36
-	23/48
-	39/16
	1/96
-	5/36
	13/36
	23/36
-	7/6
-	31/8
	5/24
	1/8
	1/12
	5/6
	1/8
	1/24
-	5/24
-	1/12
	7/24
	3/8
-	1/4
	1/6
	11/12
-	1/32
-	15/32
-	5/32

0.09375	A31	B34	- 3/32
0.15625	A32	A33	5/32
0.15625	A32	B31	5/32
-0.03125	A32	B33	- 1/32
0.34375	A33	A34	11/32
0.03125	A33	B32	1/32
0.21875	A33	B34	7/32
0.09375	A34	B31	3/32
-0.21875	A34	B33	- 7/32
0.24997	A41	B23	1/4
0.08333	A42	B22	1/12
-0.08334	A43	B21	- 1/12
-0.16669	A43	B23	- 1/6
-0.83334	A45	B21	- 5/6
-0.91674	A45	B23	- 11/12
-0.20834	B21	B42	- 5/24
-0.12501	B21	B44	- 1/8
-0.12500	B22	B41	- 1/8
-0.04167	B22	B43	- 1/24
0.20833	B22	B45	5/24
-0.29169	B23	B42	- 7/24
-0.37503	B23	B44	- 3/8
0.03125	B31	B32	1/32
0.46875	B31	B34	15/32
-0.15625	B32	B33	- 5/32
-0.34375	B33	B34	- 11/32
0.12500	A52		1/8
0.12500	A54		1/8
0.62500	A56		5/8
0.12500	B52		1/8
0.12500	B54		1/8
0.62500	B56		5/8

Schlußwort

Abschließend möchte ich allen danken, die mich im Zusammenhang mit dieser Arbeit gefördert haben. Insbesondere danke ich Frau Professor Dr. R. Moufang, die mir die Anregung zu dieser Arbeit gab und mich mit ihrem Rat unterstützte.

Weiterhin danke ich Herrn Direktor Dr.Dr.h.c. K. Steimel und Herrn Dr. C. Stöcker, die es mir ermöglichten, diese Arbeit im Rahmen meines Beschäftigungsverhältnisses im Forschungs-Institut der AEG zu erstellen.

Herrn Direktor Dr. E. Glowatzki vom Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt und der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich, daß mir für meine Rechnungen die elektronische Rechananlage IBM 704 zur Verfügung gestellt wurde.

Literaturverzeichnis

- [1] Malkin, J.G.: Theorie der Stabilität einer Bewegung.
R. Oldenbourg München 1959.
- [2] Hahn, W.: Theorie und Anwendung der direkten Methode von
Ljapunow. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.
Neue Folge, Heft 22. Springer Verlag 1959.
- [3] Ryshik, I.M. und Gradstein I.S.: Summen-, Produkt- und
Integral-Tafeln. Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1957.
- [4] Lindman, C.F.: Examen des Nouvelles tables d'intégrales
définies de M. Bierens de Haan. Amsterdam 1867. Konigl. Svenska
Vetenskaps-Akademiens Handlinger, Bandet 24 Nr. 5,
Stockholm 1891.
- [5] Schörnig, G.: Algebraische Rechnung auf einer elektronischen
Rechananlage. "elektronische datenverarbeitung", Verlag
Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, Heft 3, Juni 1963.

Lebenslauf

Als Sohn des Regierungs-Vermessungsrates Walter Schörnig und seiner Ehefrau Erna, geb. Malz, wurde ich am 22. September 1932 in Neisse O/S geboren. Bis zu der Vertreibung im Oktober 1946 wohnte ich in Schlesien (Neurode, Militsch, Schweidnitz) und danach 1946 bis Ostern 1950 in Sachsen (Markkleeberg, Freital). Seit 1950 bin ich in Hessen (Grävenwiesbach, Usingen, Bad Homburg, Dreieichenhain).

Durch den häufigen Wohnungswechsel mußte ich sehr oft die Schule wechseln. Ich besuchte 10 verschiedene Schulen, bis ich Ostern 1953 in der Christian-Wirth-Schule zu Usingen die Reifeprüfung ablegte. Von Januar 1945 bis Oktober 1946 hatte ich überhaupt keine Gelegenheit zum Schulbesuch. Von 1953 bis Februar 1961 studierte ich an der Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main, wobei ich zwischendurch 2 Semester beurlaubt war. Mein Studium beschloß ich mit der Diplom-Hauptprüfung für Mathematiker im Februar 1961.

Seit Juni 1961 bin ich im Forschungs-Institut der AEG beschäftigt. Im Mai 1963 heiratete ich und wohne nun in Dreieichenhain.

